**Билет 7.**

Комбинаторика. Теорема о формулах перестановок, размещений, сочетаний.

Комбинаторика – раздел математики, изучающий способы подсчета числа элементов в конечных множествах.

Конечное множество:

Обозначим множество первых n натуральных чисел через Jn = {1, 2, …, n}.

Множество Х – конечное, если оно эквивалентно множеству Jn.  n в таком случае является количеством/числом множества Х. Обозначение: |Х| = n.

Пустое множество тоже является конечным.

Х = {x1, x2, …, xn} – конечное множество.

Любой упорядоченный набор (xi1, xi2, …, xin) из n различных элементов множества Х – перестановка.

Любой упорядоченный набор (xi1, xi2, …, xim) из m, где m < n, - размещение из n элементов по m.

Такой же неупорядоченный набор – сочетание из n по m.

Если входят и неразличные элементы, то это сочетания и размещения с повторениями.

Теорема о формулах перестановок, размещений, сочетаний.

* Рn = n!

Рn - число всевозможных перестановок из n элементов

На первое место в перестановке можно поставить любой из n элементов множества Х, на второе место – уже любой из n – 1 оставшихся и т. д. На последнее место остается только один элемент. Тем самым всего будет

Рn = n(n-1) …1 = n! перестановок.

* Amn = n(n – 1)…(n – m + 1) =

Amn  - число всех размещений из n элементов по m

Аналогично доказательству теоремы 1. При этом для m = n имеем Ann = Pn = n!, так как по определению 0! = 1

* Сmn =

Сmn – число всех сочетаний из n элементов по m

Каждое сочетание из m элементов можно сопоставить с классом всех перестановок в нем. Число элементов в таком классе равно Pm = m!. Тогда объединение всех таких классов будет множеством всех размещений из n элементов по m и, следовательно Amn = m! Сmn.

Таким образом, Сmn = Anm : m! =

* Â (n, m) = nm

Â (n, m) – число всех размещений из n элементов по m с повторениями

Рассмотрим размещение с повторением из n элементов по m. На первое место в таком размещении можно поставить любой из n элементов множества X, а после этот элемент возвращается в Х. Поэтому на второе и остальные места до m можно снова поставить любой из n элементов. Тем самым имеем Â (n, m) = n·n·…·n = nm .

* 

 - число всех сочетаний из n элементов по m с повторениями.

 Рассмотрим сочетание с повторением из n элементов по m. Перенумеруем элементы множества x произвольным образом. Каждое сочетание с повторением закодируем последовательностью 1 или 0 по правилу. Если первый элемент множества Х не участвует в данном сочетании k1 раз, то в коде сочетания поставим вначале ровно k1 единиц и затем 0. Далее, если второй элемент множества Х не участвует в данном сочетании, то в коде этого сочетания ничего не ставим и затем 0, и так далее до последнего элемента из множества Х. Только для последнего элемента множества Х в коде не будем ставить завершающий 0. Он не нужен, нечего отделять. Таким образом, в коде сочетания с повторением будут 1 в количестве

k1 + k2 + … + kn = m штук и 0 – в количестве (n – 1) штук. Например, код (1100111) говорит, что первый элемент из множества Х в сочетании присутствует 2 раза, второй элемент не присутствует, а третий элемент присутствует в сочетании 3 раза и он последний во множестве Х. Число единиц – 5, а число нулей – 2 = (3 – 1). Следовательно, это сочетание с повторением из трех элементов по 5. Итак, надо посчитать число двоичных последовательностей из 0 и 1 длины (n + m – 1), в которых ровно m единиц. Следовательно,

